Deterministický Turingov stroj

Dávid Mišiak

Zadanie. Uvažujme jazyk $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) = 2\#_b(w) \wedge \#_a(w) = 3\#_c(w)\}$. Dokážte, že $L \in \mathscr{L}_{rec}$. Potrebnú konštrukciu DTS spravte poriadne formálne a jej správnosť následne slovne zdôvodnite. Kvôli čitateľnosti riešení vyžadujeme, aby vaše riešenie obsahovalo okrem definície prechodovej funkcie aj slovný popis algoritmu, ktorý váš DTS realizuje.

Riešenie. Majme DTS $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, kde

$$K = \{q_0, q_{\text{nájdi}\,b}, q_{\text{doľava}\,ba}, q_{ba1}, q_{ba2}, q_{\text{nové}\,b}, q_{\text{odznač}}, q_{\text{nájdi}\,c}, q_{\text{doľava}\,ca}, q_{ca1}, q_{ca2}, q_{ca3}, q_{\text{nové}\,c}, q_{\text{kontrola}}, q_{\mathrm{F}}\},$$

$$\Sigma = \{a, b, c\},$$

$$\Gamma = \{a, b, c, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{\mathrm{B}}\},$$

$$F = \{q_{\mathrm{F}}\}$$

a δ je definovaná nasledovne:

$$\delta(q_0, \mathbf{B}) = \{(q_{\mathrm{F}}, \overline{\mathrm{B}}, 0)\} \tag{1}$$

$$\delta(q_0, x) = \{(q_{\text{nájdi}\,b}, x, 0)\} \quad \forall x \in \{a, b, c\} \tag{2}$$

$$\delta(q_{\text{nájdi}\,b}, x) = \{(q_{\text{nájdi}\,b}, x, 1)\} \quad \forall x \in \{a, \overline{a}, \overline{b}, c\} \tag{3}$$

$$\delta(q_{\text{nájdi}\,b}, b) = \{(q_{\text{doľava}\,ba}, \overline{b}, -1)\} \tag{4}$$

$$\delta(q_{\text{doľava}\,ba}, x) = \{(q_{\text{doľava}\,ba}, x, -1)\} \quad \forall x \in \{a, \overline{a}, b, \overline{b}, c\} \tag{5}$$

$$\delta(q_{\text{doľava}\,ba}, \beta) = \{(q_{ba1}, \overline{\mathrm{B}}, 1)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{6}$$

$$\delta(q_{ba1}, x) = \{(q_{ba1}, x, 1)\} \quad \forall x \in \{\overline{a}, b, \overline{b}, c\} \tag{7}$$

$$\delta(q_{ba1}, a) = \{(q_{ba2}, \overline{a}, 1)\} \tag{8}$$

$$\delta(q_{ba2}, x) = \{(q_{ba2}, x, 1)\} \quad \forall x \in \{\overline{a}, b, \overline{b}, c\} \tag{9}$$

$$\delta(q_{ba2}, a) = \{(q_{\text{nové}\,b}, \overline{a}, -1)\} \tag{10}$$

$$\delta(q_{\text{nové}\,b}, x) = \{(q_{\text{nové}\,b}, x, -1)\} \quad \forall x \in \{a, \overline{a}, b, \overline{b}, c\} \tag{11}$$

$$\delta(q_{\text{nové}\,b}, \beta) = \{(q_{\text{nájdi}\,b}, \overline{\mathrm{B}}, 1)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{12}$$

$$\delta(q_{\text{nájdi}\,b}, \beta) = \{(q_{\text{odznač}}, \overline{\mathrm{B}}, -1)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{13}$$

$$\delta(q_{\text{odznač}}, \overline{a}) = \{(q_{\text{odznač}}, a, -1)\} \tag{14}$$

$$\delta(q_{\text{odznač}}, x) = \{(q_{\text{odznač}}, x, -1)\} \quad \forall x \in \{\overline{b}, c\} \tag{15}$$

$$\delta(q_{\text{odznač}}, \beta) = \{(q_{\text{nájdi}\,c}, \overline{\mathrm{B}}, 1)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{16}$$

$$\delta(q_{\text{nájdi}\,c}, x) = \{(q_{\text{nájdi}\,c}, x, 1)\} \quad \forall x \in \{a, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\} \tag{17}$$

$$\delta(q_{\text{nájdi}\,c}, c) = \{(q_{\text{doľava}\,ca}, \overline{c}, -1)\} \tag{18}$$

$$\delta(q_{\text{doľava}\,ca}, x) = \{(q_{\text{doľava}\,ca}, x, -1)\} \quad \forall x \in \{a, \overline{a}, \overline{b}, c, \overline{c}\} \tag{19}$$

$$\delta(q_{\text{doľava}\,ca}, \beta) = \{(q_{ca1}, \overline{\mathrm{B}}, 1)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{20}$$

$$\delta(q_{ca1}, x) = \{(q_{ca1}, x, 1)\} \quad \forall x \in \{\overline{a}, \overline{b}, c, \overline{c}\} \tag{21}$$

$$\delta(q_{ca1}, a) = \{(q_{ca2}, \overline{a}, 1)\} \tag{22}$$

$$\delta(q_{ca2}, x) = \{(q_{ca2}, x, 1)\} \quad \forall x \in \{\overline{a}, \overline{b}, c, \overline{c}\} \tag{23}$$

$$\delta(q_{ca2}, a) = \{(q_{ca3}, \overline{a}, -1)\} \tag{24}$$

$$\delta(q_{ca3}, x) = \{(q_{ca3}, x, 1)\} \quad \forall x \in \{\overline{a}, \overline{b}, c, \overline{c}\} \tag{25}$$

$$\delta(q_{ca3}, a) = \{(q_{\text{nové}\,c}, \overline{a}, -1)\} \tag{26}$$

$$\delta(q_{\text{nové}\,c}, x) = \{(q_{\text{nové}\,c}, x, -1)\} \quad \forall x \in \{a, \overline{a}, \overline{b}, c, \overline{c}\} \tag{27}$$

$$\delta(q_{\text{nové}\,c}, \beta) = \{(q_{\text{nájdi}\,c}, \overline{\mathrm{B}}, 1)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{28}$$

$$\delta(q_{\text{nájdi}\,c}, \beta) = \{(q_{\text{kontrola}}, \overline{\mathrm{B}}, -1)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{29}$$

$$\delta(q_{\text{kontrola}}, x) = \{(q_{\text{kontrola}}, x, -1)\} \quad \forall x \in \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\} \tag{30}$$

$$\delta(q_{\text{kontrola}}, \beta) = \{(q_{\mathrm{F}}, \overline{\mathrm{B}}, 0)\} \quad \forall \beta \in \{\mathbf{B}, \overline{\mathrm{B}}\} \tag{31}$$

Stroj funguje nasledovne. Prechod (1) najprv skontroluje, či slovo w náhodou nie je ε – ak je, akceptuje. Odteraz teda môžeme predpokladať, že w má dĺžku aspoň 1. Prechod (2) nás uvedie do stavu $q_{\text{nájdi}\, b}$.

Tým sa začala „prvá faza“ činnosti stroja (prechody (2) až (15), v definícii δ oddelená vodorovnými čiarami), v ktorej skontroluje, či $\#_a(w) = 2\#_b(w)$. Spraví to tak, že zakaždým nájde b, označí ho (to zapisujeme ako $\overline{b}$) a následne k nemu označí vždy práve dve neoznačené a.

Trochu detailnejšie: Sme v stave $q_{\text{nájdi}\, b}$ na ľavom kraji w. Prechod (3) nás bude posúvať doprava, až kým nenarazíme na neoznačené b, (4) ho označí a pomocou (5) a (6) sa presunieme opäť na ľavý kraj w (všimnime si, že to funguje aj ak je b hneď prvým písmenom), kde prejdeme do stavu q_{ba1}. V ňom pomocou (7) a (8) prejdeme doprava k prvému neoznačenému a, ktoré označíme a prejdeme do stavu q_{ba2}, v ktorom zas pomocou (9) a (10) nájdeme ďalšie neoznačené a a označíme ho. V tomto momente sme označili presne jedno b a dve a odkedy sme boli v stave $q_{\text{nájdi}\, b}$. Pomocou (11) a (12) sa teda v stave $q_{\text{nové}\, b}$ opäť dostaneme na začiatok w a do stavu $q_{\text{nájdi}\, b}$, znova označíme jedno b a dve a a tak dookola.

Ak sa stane, že pri prechode cez w v stave $q_{\text{nájdi}\, b}$ nenájdeme neoznačené b a prídeme za koniec w, použije sa prechod (13), ktorý nás dostane do stavu $q_{\text{odznač}}$ na posledné písmeno w. V tomto stave ideme pomocou (14) a (15) doľava po w, pričom označené a odznačujeme a $\overline{b}, c$ nechávame tak. Po dosiahnutí ľavého kraja w nás (16) dá do stavu $q_{\text{nájdi}\, c}$.

V tomto okamihu sme na začiatku w; navyše w pozostáva iba z písmen $a, \overline{b}, c$. Nastal čas na „druhú fázu“, v ktorej skontrolujeme, či $\#_a(w) = 3\#_c(w)$. Spravíme to úplne rovnako, ako v prvej fáze – budeme vždy začínať na ľavom kraji w, nájdeme prvé neoznačené c, označíme ho, vrátime sa na začiatok w, nájdeme postupne prvé *tri* neoznačené a, označíme ich, vrátime sa na začiatok w a toto opakujeme, až kým sa nám neminú neoznačené c. To popisujú prechody (17) až (28), ktoré sa od (3) až (12) líšia preznačením písmen b, c (aj $\overline{b}, \overline{c}$) a pridaním stavu q_{ca3}, teda sa namiesto $q_{ba1} \to q_{ba2}$ ide $q_{ca1} \to q_{ca2} \to q_{ca3}$.

Keď máme označené všetky c, prechod (29) nás za pravým krajom w dá do stavu q_{kontrola}, v ktorom pomocou prechodu (30) prejdeme po všetkých označených písmenách na ľavý kraj w, kde nás (31) dá do akceptačného stavu.

Ak teda máme $w \in L$, isto platí $\#_a(w) = 2\#_b(w)$ aj $\#_a(w) = 3\#_c(w)$, čiže práve popísaný akceptačný výpočet na takomto w bez problémov prebehne a skončíme v stave q_{F}.

Ak naopak $w \notin L$, musí platiť aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

- $\#_a(w) < 2\#_b(w)$. Ak je primálo písmen a, výpočet sa zasekne na prechode (7) alebo (9), lebo príde na koniec w a nenájde a na označenie.
- $\#_a(w) > 2\#_b(w)$. Ak po označení všetkých b ostanú nejaké neoznačené a, výpočet sa zasekne na prechode (15), lebo nevie odznačiť neoznačené a.
- $\#_a(w) < 3\#_c(w)$. Podobne ako v prvom prípade – výpočet sa zasekne na (21), (23) alebo (25), lebo príde na koniec w.
- $\#_a(w) > 3\#_c(w)$. Podobne ako v druhom prípade – výpočet sa zasekne na (30), lebo kontrola nevie prejsť cez neoznačené a.

Vidíme, že A akceptuje práve jazyk L a na všetkých vstupoch zastaví (akceptuje alebo sa zasekne), takže $L \in \mathscr{L}_{rec}$, čo bolo treba dokázať.